



ulm university universität
uulm

Hausarbeit - Wurzelfunktionen

Oliver Heinrich

Dozent: Frau Prof. Dr. Astrid Beckmann

Veranstaltung: Fachdidaktik Mathematik im WS 07/08

Abgabe: 13. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematischer Hintergrund	3
1.1	Die Wurzel	3
1.2	Allgemeines	3
1.3	Darstellung einer Wurzel als Potenz	3
1.4	Wurzelgesetze	3
1.5	Die Wurzelfunktion	4
1.5.1	Die Potenzfunktion	4
1.5.2	Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der Potenzfunktion .	5
1.5.3	Einige Graphen von Wurzelfunktionen	6
2	Mathematikdidaktischer Hintergrund	8
3	Methodische Überlegungen	9
4	Aufgaben	9

1 Mathematischer Hintergrund

1.1 Die Wurzel

1.2 Allgemeines

Will man in folgender Gleichung (1) die Lösung x bestimmen, benötigt man das Wurzelziehen (Radizieren).

$$x^n = a \quad a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad (1)$$

Das Ergebnis lautet dann:

$$x = \sqrt[n]{a} \quad (2)$$

x wird die „ n -te Wurzel von a “ genannt. n heißt *Wurzelexponent* und a *Radikand*. Die Wurzel bezeichnet man auch als Radix. Daher auch das Zeichen $\sqrt{\quad}$, das ursprünglich ein r war.

Ist in Gleichung (1) der Exponent n geradzahlig, z.B. $n = 2$, so gibt es für x zwei Lösungen unterschiedlichen Verzeichens. Schauen wir uns die Gleichung (3) einmal an:

$$x^2 = 16 \quad (3)$$

Diese Gleichung hat sowohl die Lösung $+4$, als auch -4 . Das Minus rührt daher, dass geradzahlige Potenzen der -1 wieder 1 ergeben. Der Merkspruch dafür lautet: „Minus mal Minus gibt Plus“. Wollen wir allerdings die Lösung wie in (2) berechnen, erhalten wir:

$$x = \sqrt[2]{16} = +4 \quad (4)$$

Durch das Radizieren erhält man nur die positive Lösung. Allgemeiner kann man für natürliche Zahlen $n > 1$ formulieren:

$$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| \quad (5)$$

1.3 Darstellung einer Wurzel als Potenz

Oftmals ist es sinnvoll eine „unhandliche“ Wurzel als Potenz darzustellen. Es gilt:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad (6)$$

Anhand dessen kann man die nun folgenden Wurzelgesetze leicht durch Anwenden der Potenzgesetze nachvollziehen.

1.4 Wurzelgesetze

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$

1.5 Die Wurzelfunktion

1.5.1 Die Potenzfunktion

Die Potenzfunktion ist folgende Abbildung:

$$f : x \mapsto a \cdot x^n \quad a, n \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Wir greifen uns mal den Spezialfall $a = 1$, $n = 2$ heraus:

$$f(x) = x^2 \quad (8)$$

Der Graph einer Potenzfunktion heißt *Parabel*. Der Graph des Spezialfalls (8) heißt *Normalparabel*. Die folgende Abbildung (1) zeigt die Graphen von Potenzfunktionen mit geraden Exponenten und $a = 1$.

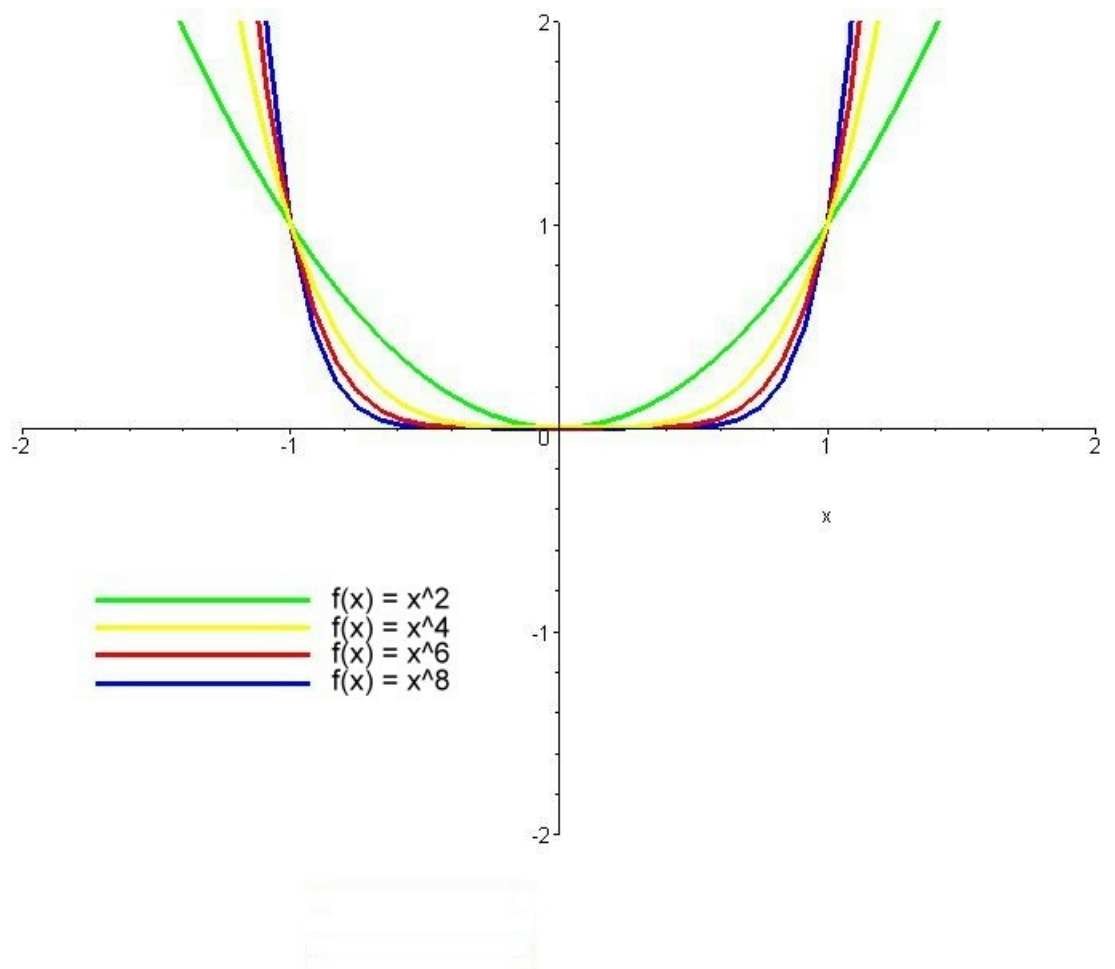


Abbildung 1: Potenzfunktionen mit geraden Exponenten

Die Abbildung (2) zeigt die Graphen von Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten.

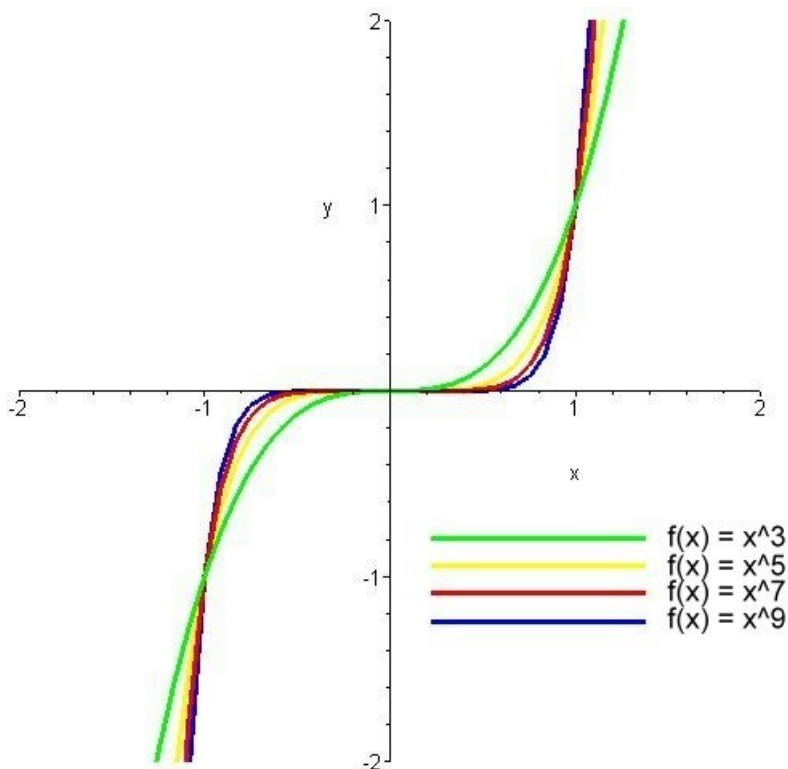


Abbildung 2: Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten

1.5.2 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der Potenzfunktion

Hat eine Funktion an unterschiedlichen Stellen (x -Werten) unterschiedliche Funktionswerte (y -Werte), so hat sie eine *Umkehrfunktion* (oder inverse Funktion). Solche Funktionen heißen *invertierbar*. Die Umkehrfunktion einer invertierbaren Funktion weist jedem Element aus der Wertemenge ein eindeutiges Element aus der Definitionsmenge zu. Die Umkehrfunktion von $f(x)$ wird $f^{-1}(x)$ geschrieben. Kommen wir auf Beispiel (8) zurück. Die Funktion $f(x) = x^2$ hat als Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} =: \sqrt{x} \quad (9)$$

Allerdings wissen wir, dass die Wurzel nur für nicht-negative Zahlen definiert ist. Deshalb ist die Definitionsmenge der Umkehrfunktion (9) auf die nicht-negativen reellen Zahlen beschränkt: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R} \setminus]-\infty, 0[$. Für die Wertemenge folgt dann: $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R} \setminus]-\infty, 0[$. Und da die Wertemenge der Umkehrfunktion gleich wie die Definitionsmenge der Funktion sein muss, bildet $f(x)$ von \mathbb{R}_0^+ nach \mathbb{R}_0^+ ab. Also: $f : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$ und auch: $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$. Wir bemerken also, dass die Funktion $f(x) = x^2$ die Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ als Umkehrfunktion hat. Betrachten wir weitere Potenzfunktionen, z.B. $f(x) = x^3$ ($f(x) = x^4$), so bemerken wir, dass die Umkehrfunktionen $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ($f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$) Funktionen sind, die Wurzeln enthalten. Solche Funktionen nennt man *Wurzelfunktionen*.

Um die Umkehrfunktion zu berechnen, nennt man $f(x)$ 'y'. Dann löst man nach x auf. Steht nun x alleine auf einer Seite, so vertauscht man x und y . Man ersetzt jetzt

das 'y' durch $f^{-1}(x)$, da wir ja die Umkehrfunktion errechnet haben. Im folgenden wird nun die Umkehrfunktion für das Beispiel (8) vorgerrechnet:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \quad | \sqrt{} \\ \sqrt{y} &= x \\ \sqrt{x} &= y \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Die Graphen einiger Wurzelfunktionen sehen wie folgt aus:

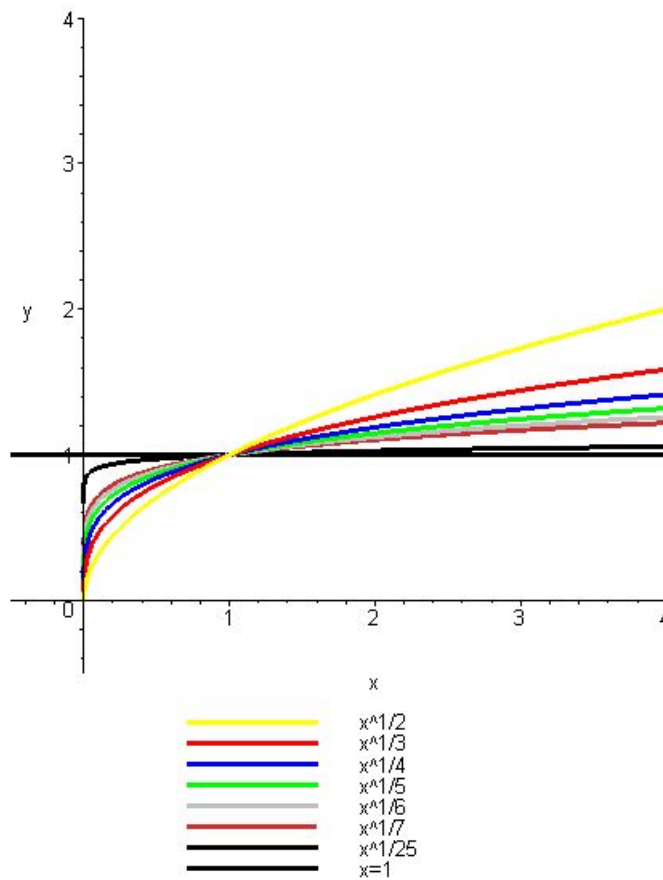


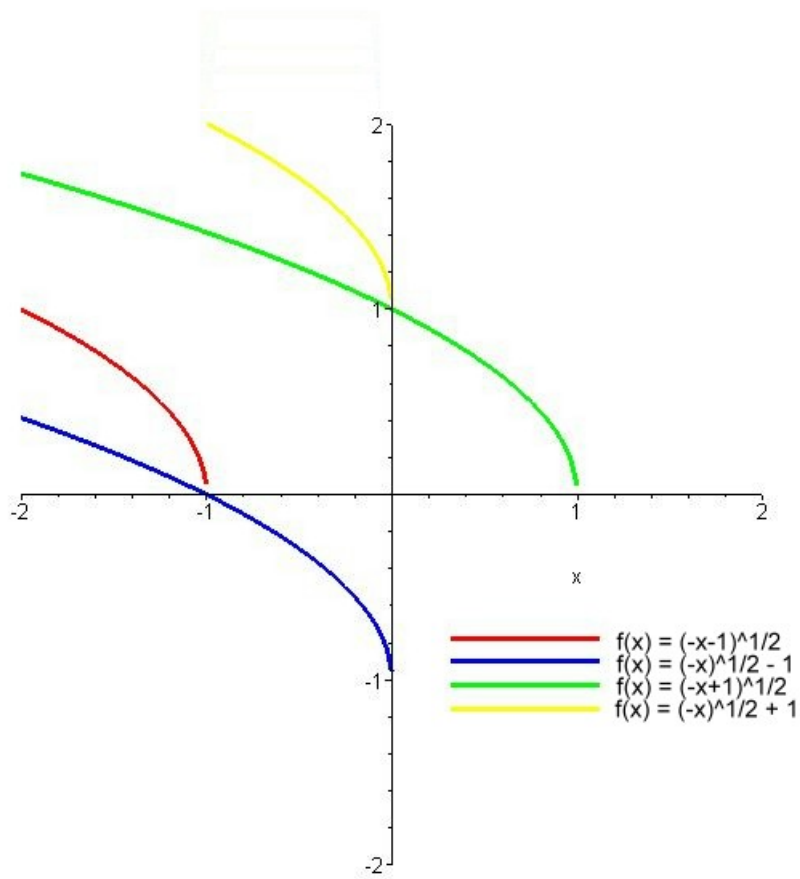
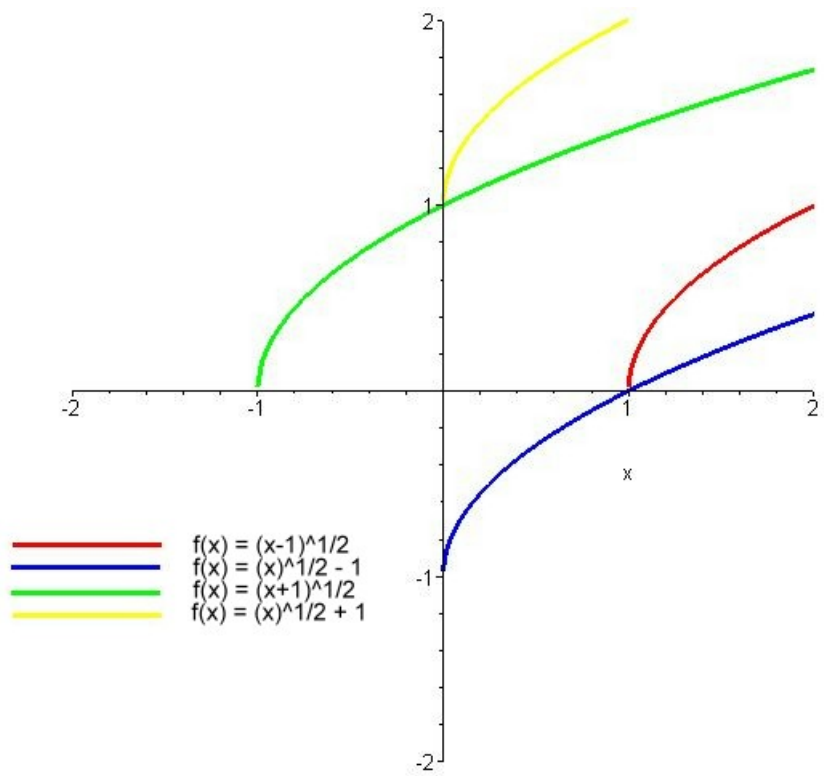
Abbildung 3: Graphen einiger Wurzelfunktionen

Man muss beachten, dass die Wurzelfunktionen divergieren, also nicht aufhören nach oben zu steigen. Gezeichnet erwecken sie zwar den Eindruck, als ob sie, abhängig vom Wurzelexponent, relativ früh nach oben beschränkt sind. Doch es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$$

1.5.3 Einige Graphen von Wurzelfunktionen

Nachfolgend sind noch ein paar unterschiedliche Wurzelfunktionen gezeichnet.



2 Mathematikdidaktischer Hintergrund

Behandelt man Funktionen, die aus den reellen Zahlen wieder in die reellen Zahlen abbilden ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), so kann man die Umkehrfunktion leicht zeichnen. Der Graph der Inversen ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden der beiden Achsen im ersten Quadranten. Hierbei kann sich bei der Wurzelfunktion ein Problem ergeben. Da durch eine Wurzel der Definitionsbereich häufig eingeschränkt wird, ist das auch bei der Wurzelfunktion der Fall. Betrachten wir wieder obiges Beispiel (8).

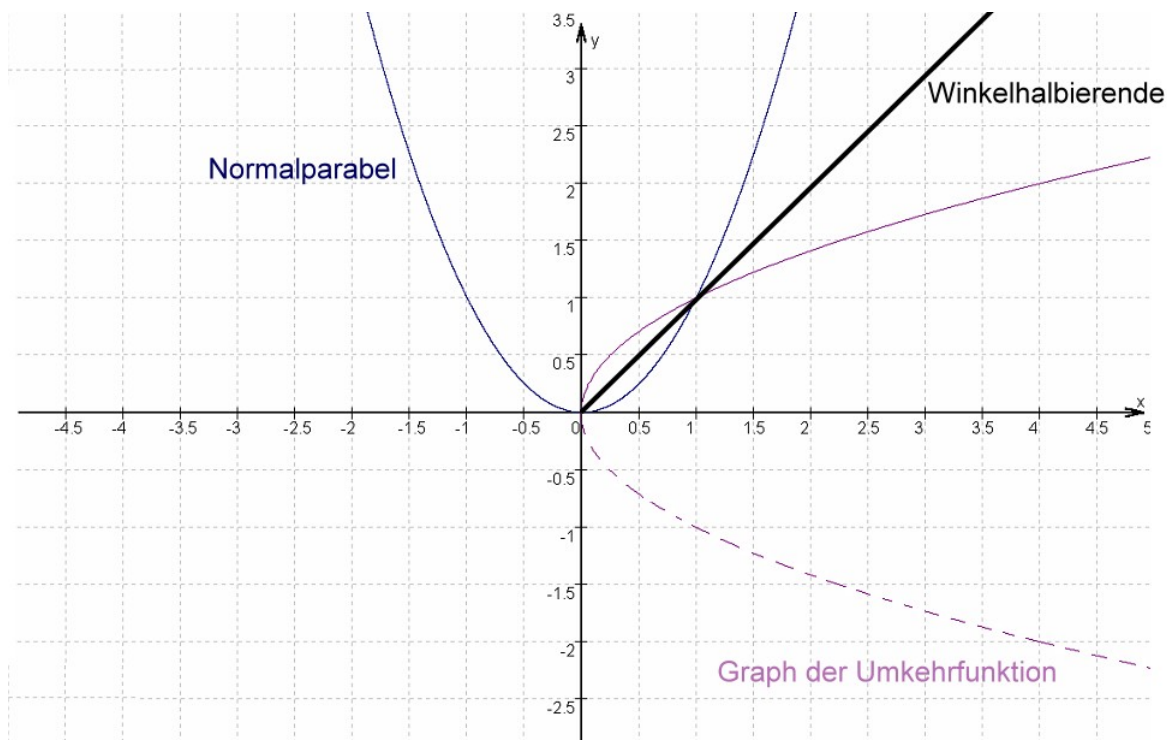


Abbildung 4: Umkehrfunktion als Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten

Hier sieht man, dass durch das Spiegeln der Normalparabel tatsächlich das Bild der Umkehrfunktion gewonnen werden kann. Jedoch muss man das nun gespiegelte Bild einschränken. Denn noch wird jedem positiven Wert aus der Definitionsmenge zwei Werte aus der Wertemenge zugewiesen. Das ist nach der Definition einer Funktion nicht zugelassen. Deshalb muss der untere gestichelte Ast gestrichen werden. Er zählt nicht zum Graph der Wurzelfunktion dazu. Dieser Umstand macht die Besonderheit der Wurzelfunktion aus, denn bei allen anderen bisher kennengelernten Funktionen erhält man sofort den Graphen der Umkehrfunktion durch die obengenannte Spiegelung. Somit kann man bei der Behandlung der Wurzelfunktion viel lernen. Schon das Einführen der Wurzeln beherbergt die Tatsache, dass man prüfen muss, ob die Wurzel überhaupt existiert, der Radikant also nichtnegativ ist. Dies findet besondere Anwendung bei den Wurzelgleichungen. Hier bekommt man vor Augen geführt, wie ein bisher bewährtes Rezept zum Zeichnen der Umkehrfunktion nicht die schlussendliche Lösung liefert. Man begreift, dass beim Anwenden der Methoden immer mitzudenken ist.

Wie in Unterkapitel 1.5.2 bereits erwähnt, ist die Wurzelfunktion nach oben unbe-

schränkt. Da dies zeichnerisch nicht ersichtlich ist, kann so eine häufige Fehlerquelle entstehen.

3 Methodische Überlegungen

Um einen sicheren Umgang mit Wurzelfunktionen zu erlangen, kann man verschiedene Aufgabentypen wählen. Eine sehr typische Aufgabe ist es, von einer Funktion die Wertetabelle anzulegen und sie mit Hilfe dieser zu zeichnen. Dabei ist bei der Aufgabenstellung zu beachten, dass nicht, wie häufig in Schulbüchern zu finden, die Abmessung des Koordinatensystems gegeben sind. Auch sollte keine Blanko-Wertetabelle angegeben werden. Beide Tatsachen fördern die Eigenständigkeit im Bezug auf das Herangehen an mathematische Aufgaben. Zum Beispiel kann ein geschultes Auge sehen, ob überhaupt eine negative Achse nötig ist. Der Schüler soll lernen, wichtige oder markante Punkte schnell zu erkennen und dementsprechend die Wertetabelle anzulegen, oder sie auch gleich so, ohne Wertetabelle, zu zeichnen, falls er seine Normalparabelschablone nutzen kann. Zu diesen Punkten zählen eventuelle Schnittpunkte mit den Achsen.

Ein anderer, obgleich auch schwierigerer Aufgabentyp ist das Finden der Zuordnungsvorschrift anhand eines Funktionsgraphen. Da man sich hier auf einfache Aufgaben beschränken möchte, ist hier die Einschränkung, dass der Graph mit der Normalparabelschablone gezeichnet wurde, nötig. Somit darf der Graph der Wurzelfunktion \sqrt{x} nur in x- und y-Richtung verschoben sein. Das allgemeine Aussehen ist dann $f(x) = \sqrt{x+a} + c$ $a, c \in \mathbb{Z}$. Der Schüler kann nun unterschiedliche Herangehensweisen wählen. Er kann bemerken, dass das a eine Verschiebung in x-Richtung und das c in y-Richtung zur Folge hat. Ist das a positiv, wird der Graph um a nach links verschoben. Ist a negativ, wird der Graph um den Betrag von a ($|a|$) nach rechts verschoben. Jedoch verschiebt das positive c den Graph um c nach oben, das negative nach unten. Dieser Umstand kann zur Verwirrung führen, denn in Richtung der positiven Achsen, also nach rechts oder oben, verschiebt zwar ein positives c , jedoch ein negatives a . Am besten wäre es, wenn der Schüler diesen Sachverhalt nicht einfach auswendig lernt, sondern sich Gedanken macht, wieso das so ist. Oder wie er sich das an einfachen Beispielen klar machen kann. Diese Fähigkeit, eine komplexere Aufgabe auf ein einfaches Beispiel zu reduzieren, ist in vielen Gebieten der Mathematik oder Physik hilfreich.

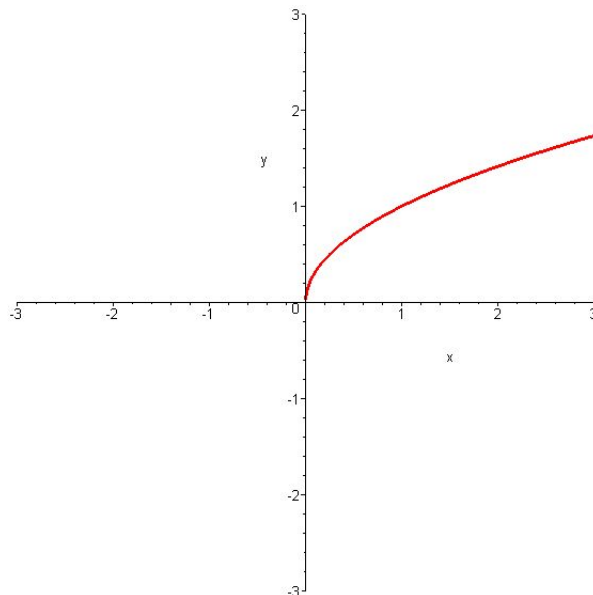
Auch das Bilden der Umkehrfunktion ist eine wichtige Disziplin, obgleich sie einfach ist, aufgrund des strengen Schemas, das man anwenden kann. Wichtig ist auch das Zeichnen der Funktion und Umkehrfunktion. So verinnerlicht man, dass die Umkehrfunktion die Spiegelung der Funktion an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten ist. Natürlich ist auch die Funktion eine Spiegelung der Umkehrfunktion an der gleichen Achse. Wobei man bei den Wurzelfunktionen beachten muss, dass nicht jeder Ast der Parabel zur Funktion gehört. Somit erfordert das Zeichnen immer volle Aufmerksamkeit, dass nicht am Ende zwei Funktionswerte zum selben x-Wert gehören.

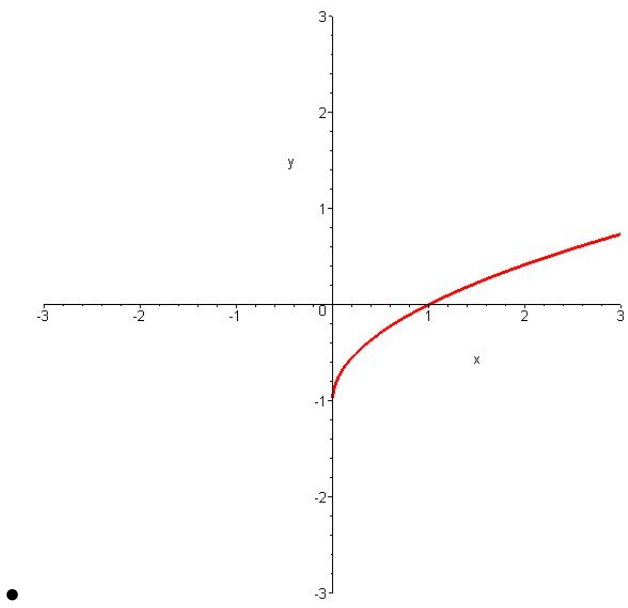
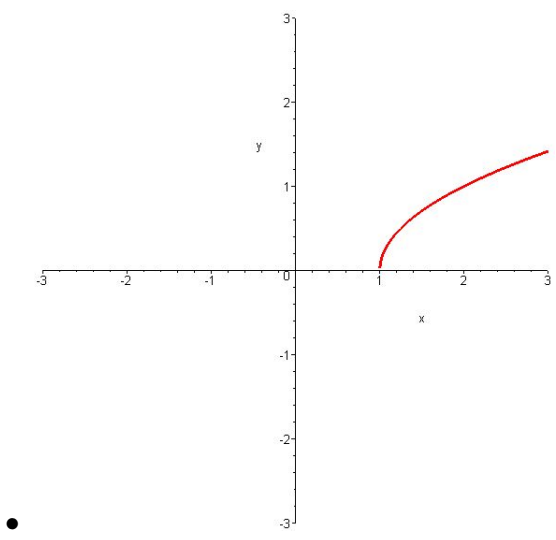
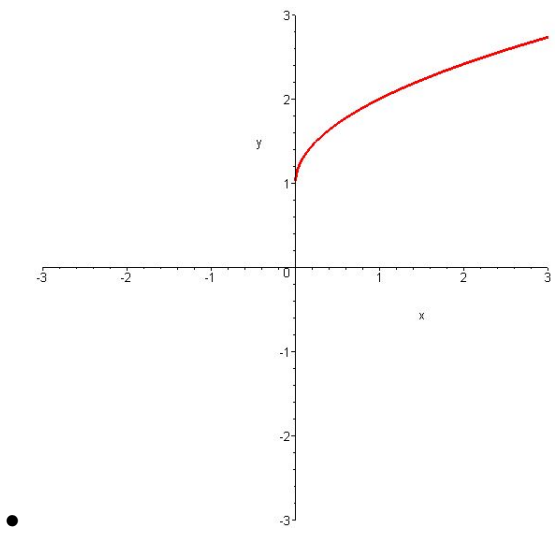
4 Aufgaben

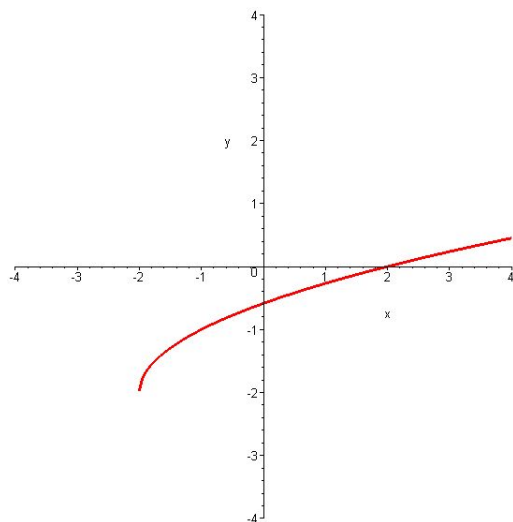
Zeichne den Graph folgender Funktionen. Überlege dir, in welchen Fällen eine Wertetabelle nötig ist und lege nur dann eine an. Benütze deine Normalparabelschablone, fall es die Aufgabe zulässt.

- $f(x) = x^2$
- $y = \sqrt{x}$
- $x \mapsto \sqrt{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $y = \sqrt{x-2}$
- $x \mapsto \sqrt{x} + 2$
- $f(x) = \sqrt{x} - 2$
- $y = \sqrt{x-2} - 2$
- $y = \sqrt{x-2} + 2$
- $y = 2 + \sqrt{x+2}$
- $y = \sqrt{x+2} - 2$
- $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3}$
- $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+3}$
- $x \mapsto \sqrt[4]{x}$
- $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x^2 + 3 \cdot x - 2} + \frac{3}{2}$ (Zusatzaufgabe für besonders Motivierte)

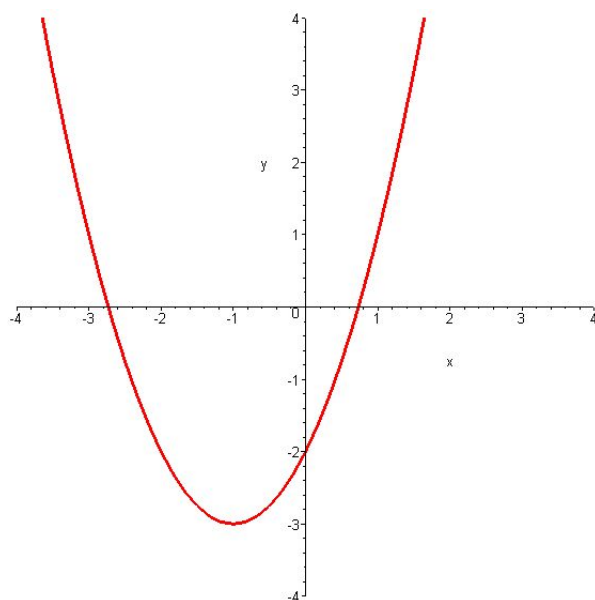
**Finde die Zuordnungsvorschrift (Funktionsgleichung) folgender Graphen.
Alle Bilder wurden mit der Normalparabel gezeichnet.**







•



•

Zur Auffrischung.

Bilde die Umkehrfunktion folgender Funktionen. Notiere jeweils die Definitions- und Wertemenge der Funktion und Umkehrfunktion.

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $f(x) = -1 - \sqrt{3-x} + 2$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2 \cdot x - 3} - 2$ (hier nicht die Umkehrfunktion bilden)
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2 \cdot x + 3} - 2$ (hier nicht die Umkehrfunktion bilden)
- $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$ (für Fleißige. Tipp: Pascalsches Dreieck)