# Versuch IX

## Longitudinale Schallwellen


Oliver Heinrich

oliver.heinrich@uni-ulm.de

Bernd Kugler

berndkugler@web.de


10.11.2006

Abgabe: 24.11.2006

Betreuer: Alexander Berg

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Allgemeines

Für die Phasengeschwindigkeit $v_{Ph}$ einer Welle mit Wellenlänge $\lambda$, Frequenz $\nu$, Kreisfrequenz $\omega$ und Wellenzahl k gilt:

$$v_{Ph} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = k \cdot v_{Ph} \tag{1}$$

Für die Gruppengeschwindigkeit $v_{Gr}$ einer Welle gilt.

$$v_{Gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{2}$$

(1) in (2):

$$v_{Gr} = \frac{\partial(k \cdot v_{Ph})}{\partial k} = v_{Ph} + \frac{\partial v_{Ph}}{\partial k} \cdot k$$

$$v_{Gr} = v_{Ph} \Leftrightarrow v_{Ph} unabhngigvonk$$

Ist $v_{Gr} = v_{Ph}$, tritt keine Dispersion auf.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

T ist die Periodendauer.

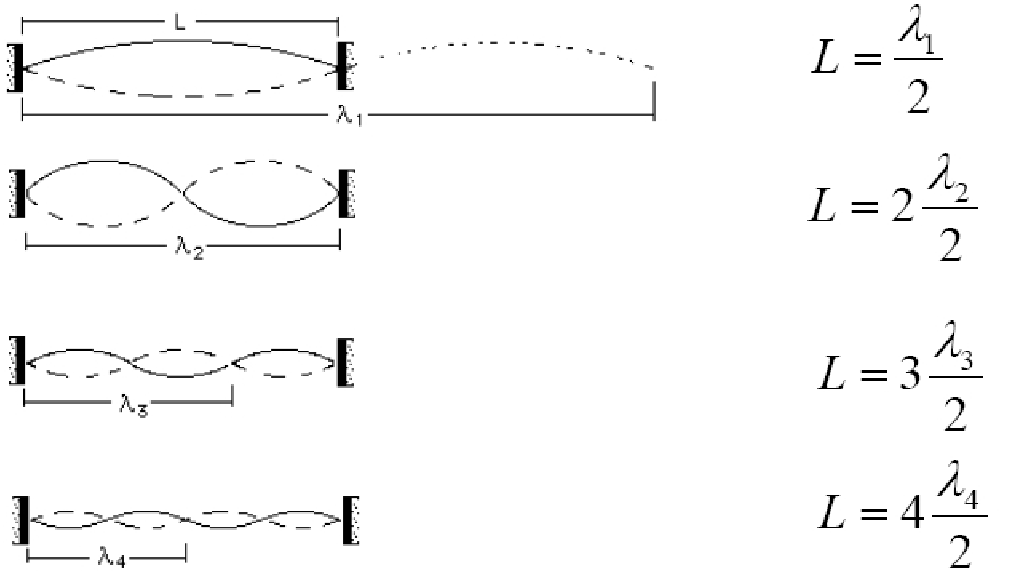
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

### 1.1.1 Reflexion zwischen zwei festen Enden

Nimmt man als Beispiel ein Seil der Länge L, das an beiden Enden fest eingespannt ist und regt es zur Schwingung an, dann wird diese Welle an den Enden reflektiert und die Welle läuft im Seil zurück. Punkte im Seil, die in Ruhe bleiben, nennt man *Wellenknoten*, Punkte, die die größte Amplitude aufweisen *Wellenbäuche*. Da beide Seiten des Seils fest eingespannt sind, entstehen an beiden Enden Wellenknoten. Dazwischen befinden sich die Wellenbäuche und eventuell auch noch Wellenknoten. Die Anzahl der Bäuche und der Knoten ist abhängig von der Anzahl der Schwingungen im Seil. Bei der Grundschwingung wird genau eine halbe Schwingung ausgeführt. Bei der ersten Oberschwingung ist es genau eine Schwingung usw.. Somit ergibt sich für die n-te Oberschwingung ($n \in \mathbb{N}$):

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$




[1]

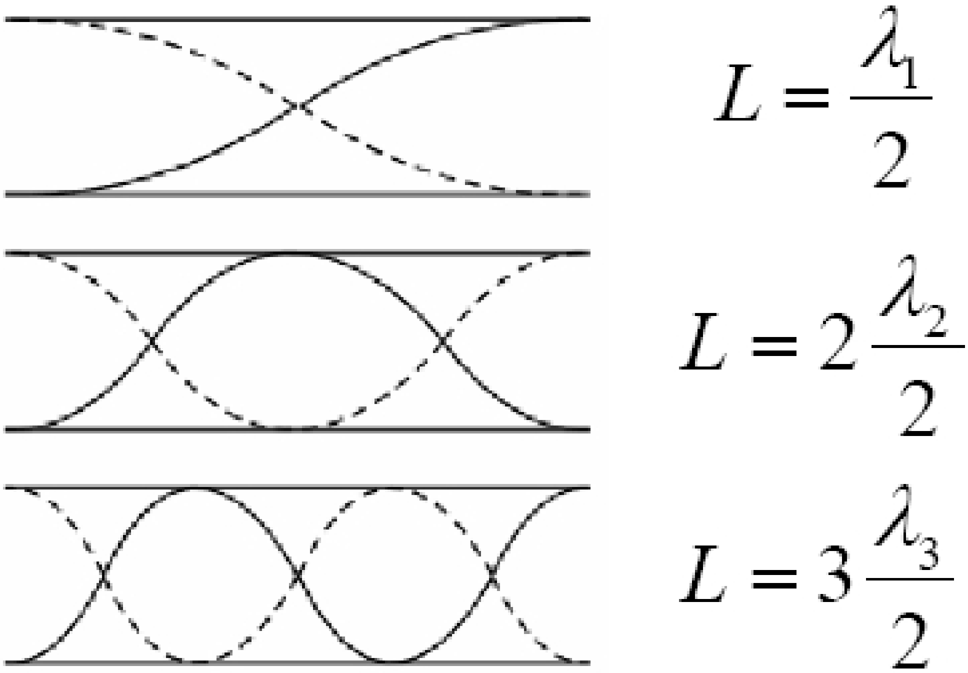
### 1.1.2 Reflexion zwischen zwei losen Enden

Ist kein Ende des Seils fest eingespannt, so befinden sich an den losen Enden Wellenbäuche. Die Anzahl der Knoten und Bäuche ist wie bei der Schwingung zwischen zwei festen Enden. Die Position dieser ist allerdings verschoben.

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

[1] www.ep4.rub.de/imperia/md/content/skripte/ws04-05/physik1fuerphysiker/vorlesung/44lektion.pdf




[2]

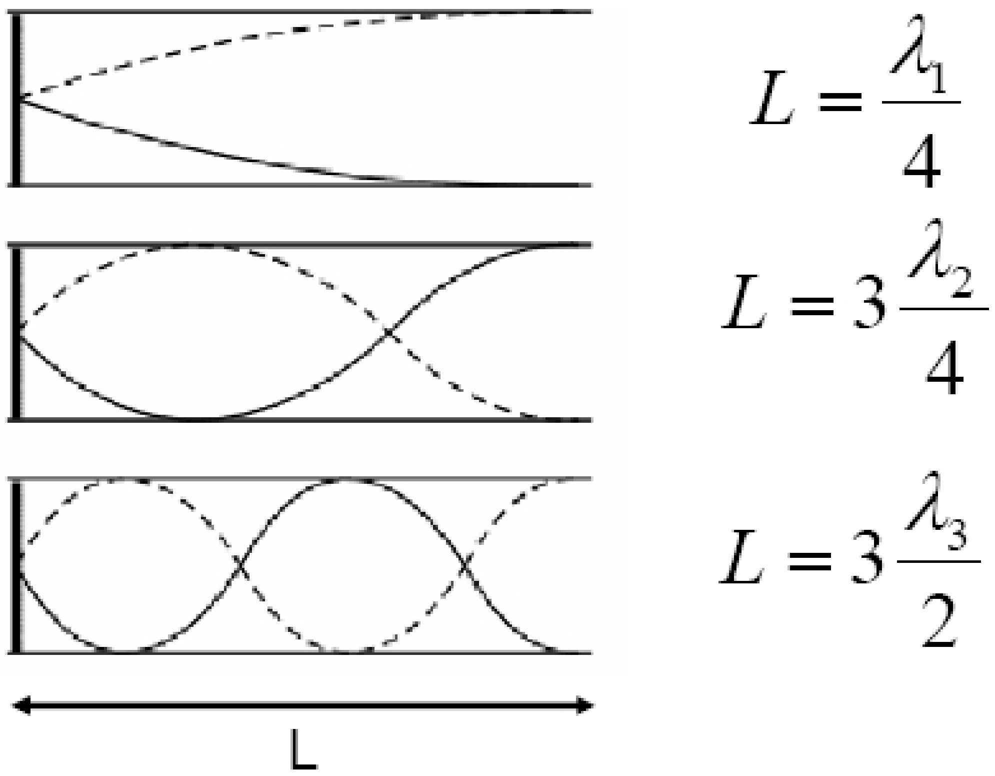
### 1.1.3 Reflexion an einem losen und einem festen Ende

Ist ein Ende des Seils eingespannt und das andere nicht, so befindet sich ein Knoten am festen Ende und ein Bauch am losen Ende. Die Grundschwingung entspicht einer viertel Wellenlänge und die erste Oberschwingung einer dreiviertel Wellenlänge. Für die n-te Schwingung ergibt sich:

$$L = \frac{\lambda_n}{4} \cdot (2n+1)$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n+1}$$

[2] www.ep4.rub.de/imperia/md/content/skripte/ws04-05/physik1fuerphysiker/vorlesung/44lektion.pdf




[3]

### 1.2 Abhängigkeit des Adiabatenexponenten von der Schallgeschwindigkeit

Für den ersten Hauptsatz der Thermodynamik gilt:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$mc_V dT = mc_p dT - pdV$$

Aus der allgemeinen Zustandsgleichung $pV = nRT$ folgt $pdV = nRdT$ (R ist die universelle Gaskonstante):

$$mc_V dT = mc_p dT - nRdT$$

$$mc_V = mc_p - nR$$

$$-\frac{m(c_V - c_p)}{n} = R$$

Mit $M = \frac{m}{n}$ ergibt sich:

$$-M(c_V - c_p) = R$$

$$M(c_p - c_V) = R$$

[3] www.ep4.rub.de/imperia/md/content/skripte/ws04-05/physik1fuerphysiker/vorlesung/44lektion.pdf

Für adiabatische Vorgänge gilt:

$$dU = \underbrace{\delta Q}_{=0} + \delta W$$

$$dU = \delta W$$

$$mc_V dT = -pdV$$

Da $p = \frac{nRT}{V}$ folgt:

$$\frac{m}{n} c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}$$

$$M c_V \frac{dT}{T} = -M(c_p - c_V) \frac{dV}{V}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} c_V \frac{dT}{T} = -(c_p - c_V) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$c_V ln \frac{T_2}{T_1} = -(c_p - c_V) ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_V} = ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{c_V - c_p}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_V} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{c_V - c_p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c_V - c_p}{c_V}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{c_p - c_V}{c_V}}$$

Mit dem Adiabatenexponenten $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ folgt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}$$

$$\frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$$

$$p \cdot V^{\gamma} = const$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{1}{\kappa \cdot V} \tag{3}$$

Die Poissongleichung besagt:

$$p = c \cdot V^{-\gamma}$$

$$\frac{dp}{dV} = -c \cdot \gamma \cdot V^{-\gamma-1} \tag{4}$$

(3) = (4)

$$\frac{1}{\kappa V} = c \cdot \gamma \cdot V^{-\gamma-1} = p \cdot V^{\gamma} \cdot \gamma \cdot V^{-(\gamma+1)}$$

$$\frac{1}{\kappa \cdot V} = p \cdot \gamma \cdot V^{-1}$$

Für die Schallgeschwindikeit in Festkörpern gilt:

$$c_{Schall} = \sqrt{\frac{Modul}{Dichte}}$$

hier:

$$= \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{p \cdot \gamma}{\rho}}$$

Mit $pV = nRT$ :

$$c_{Schall} = \sqrt{\frac{nRT\gamma}{V\rho}} = \sqrt{\frac{nRT\gamma}{m}} = \sqrt{\frac{RT\gamma}{M}}$$

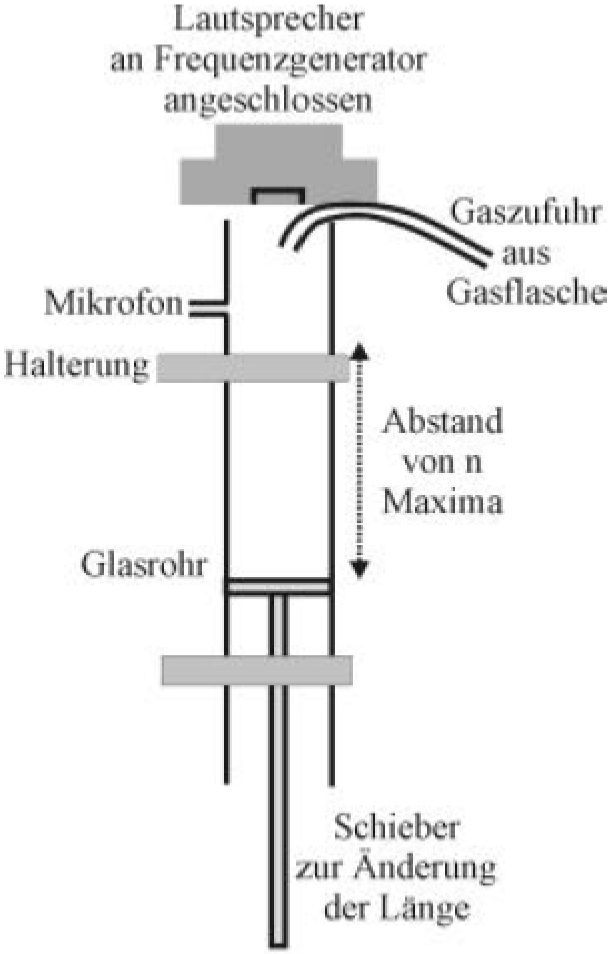
$$\gamma = \frac{c^2 M}{RT} \tag{5}$$

$$c_{Schall} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\Rightarrow E = c_{Schall}^2 \cdot \rho \tag{6}$$

# 2 Versuchsbeschreibung

## 2.1 Quinkesches Resonanzrohr




[4]

Das *Quinckesche Resonanzrohr* ist ein etwa 60 cm langes und 5 cm dickes hohles vertikales Glasrohr, in das von unten ein Stempel eingeführt ist. Oben ist das Rohr offen, dicht darüber ist ein Lautsprecher angebracht. Dieser erzeugt Töne einer einstellbaren Frequenz und Amplitude (Lautstärke). In der Nähe der oberen Öffnung ist außerdem ein Mikrofon angebracht, das mit einem Oszilloskop verbunden ist. Außen am Glasrohr ist eine Millimeterskala angebracht, anhand dieser man die Position des Stempels feststellen kann. War eine Tonhöhe eingestellt, veränderte man das Volumen, das vom Lautsprecher beschallt wird mittels dem Stempel. Man zog z.B. den ganz eingedrückten Stempel langsam nach unten. Somit vergrößerte sich das Volumen, in dem der Schall schwingen konnte und die Lautstärke änderte sich. Man geht davon aus, dass die Schallwellen nur einmal am Stempel reflektieren und als Überlagerung der ankommenden und reflektierten

[4] Protokoll von Andreas Josef Birnesser und Sascha Wagner (2000)

Schallwelle eine stehende Welle ausbildet. Man kann nun entweder den Abstand zwischen zwei Intensitätsmaxima, also Wellenbäuche, oder Intensitätsminima, also Wellenknoten, messen. Dieser entspricht dann genau einer halben Wellenlänge. Anhand davon kann man dann die Schallgeschwindigkeit des im Glasrohr befindlichen Gases bestimmen. In unserem Fall war es Luft und $CO_2$. Die Formel zur Schallgeschwindigkeitsbestimmung (7) lautet:

$$c_{Schall} = \lambda \cdot \nu \tag{7}$$

$c_{Schall}$: Schallgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$
$\lambda$: Wellenlänge in m
$\nu$: Frequenz des Tones des Lautsprechers in $\frac{1}{s}$
Außerdem bestimmen wir den *Adiabatenexponent* mit der Gleichung (5):

$$\gamma = \frac{c^2 M}{RT}$$

### 2.2 Kundtsches Rohr

Bei diesem Veruch spannt man einen Stab horizontal in eine Halterung ein und schlägt auf ein Ende mit einem anderen festen Gegenstand. Auf der anderen Seite des Stabes befindet sich ein Mikrofon, das die ankommenden Schallwellen, die sich durch den Schlag ergeben, aufnimmt und an einen Oszilloskop weiter gibt. Dieses zeigt mittels einer Fourier-Transformation die Frequenzen in Abhängigkeit von der Intensität an. Nun kann man diese Stellen ablesen, bei denen ein Maximum auftritt.
Wir führten diesen Versuch auf zwei unterschiedliche Weisen durch. Zuerst spannten wir einen Stahlstab einmal mittig ein. Die Grundschwingung entspricht dann einer halben Wellenlänge (vgl. 1.1.2). Wir lasen vom Oszilloskop die Frequenzen der Grundschwingung und der ersten und zweiten Oberschwingung ab. Beim zweiten Veruch verwendeten wir einen längeren Messingstab, den wir bei $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Länge einspannten. Die erste ermittelte Schwingung entsprach $\frac{3}{2}$, die zweite zwei, die dritte $\frac{9}{2}$ und die vierte sechs Wellenlängen.
Mithilfe der ermittelten Frequenzen lässt sich die Schallgeschwindigkeit wieder mit Formel (6) berechnen. Das Elastizitätsmodul E ergibt sich aus der Formel (6) $E = c_{Schall}^2 \cdot \rho$.

## 3 Versuchsauswertung

Alle Literaturwerte stammen aus dem Stöcker.
Der Gausfehler für die Schallgeschwindigkeit berechnet sich wie folgt:

$$\Delta c = \sqrt{(\lambda \cdot \Delta\nu)^2 + (\nu \cdot \Delta\lambda)^2}$$

### 3.1 Quinkesches Resonanzrohr

Die Ungenauigkeit der Frequenzen des Lautsprechers beträgt 1 Hz.
Zuerst war das Rohr mit Luft befüllt.

| $f_1$ = 1170 Hz | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nach unten Höhe in mm | nach oben Höhe in mm | Differenzen in mm | Differenzen in mm | Mittelwert d. Diffrenzen in m | $\lambda$ in m | c in $\frac{m}{s}$ | $\Delta c$ in $\frac{m}{s}$ |
| 293 | 298 | 147 | 151 | 0,149 | 0,298 | 348,66 | 11,704 |
| 146 | 147 | | | | | | |
| $f_2$ = 1655 Hz | | | | | | | |
| 360 | 362 | 102 | 105 | | | | |
| 258 | 257 | 105 | 106 | | | | |
| 153 | 151 | | | 0,105 | 0,209 | 345,90 | 16,551 |
| $f_3$ = 2539 Hz | | | | | | | |
| 342 | 340 | 65 | 65 | | | | |
| 277 | 275 | 77 | 70 | | | | |
| 200 | 205 | 61 | 65 | | | | |
| 139 | 140 | 70 | 69 | | | | |
| 69 | 71 | | | 0,068 | 0,136 | 344,04 | 25,390 |
| $f_4$ = 3253 Hz | | | | | | | |
| 233 | 230 | 55 | 50 | | | | |
| 178 | 180 | 52 | 56 | | | | |
| 126 | 124 | 53 | 52 | | | | |
| 73 | 72 | 44 | 45 | | | | |
| 29 | 27 | | | 0,051 | 0,102 | 330,99 | 32,530 |
| | | | | $\bar{c}$ | 342,40 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | | Standard-abweichung | 7,84 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | | Gauß | 21,54 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | | $c_{Literatur}$ | 343 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | | rel. Fehler | -0,0018 | | |
| | | | | Temperatur | 294 | K | |
| | | | | $M_{Luft}$ | 0,0290 | $\frac{kg}{mol}$ | |
| | | | | R | 8,3144 | $\frac{J}{mol \cdot K}$ | |
| | | | | $\gamma$ | 1,389 | | |
| | | | | $\Delta\gamma$ | 0,175 | | |
| | | | | $\gamma_{Literatur}$ | 1,4 | | |
| | | | | rel. Fehler | -0,008 | | |

Nun wurde das Rohr mit $CO_2$ befüllt.

| nach oben Höhe in mm | Differenzen in mm | Mittelwert d. Diffrenzen in m | $\lambda$ in m | c in $\frac{m}{s}$ | $\Delta c$ in $\frac{m}{s}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1 = 1177$ Hz | | | | | |
| 100 | 122 | 0,12 | 0,23 | 270,7 | 11,77 |
| 222 | 108 | | | | |
| 330 | | | | | |
| $f_2 = 1661$ Hz | | | | | |
| 73 | 66 | 0,08 | 0,15 | 251,6 | 16,61 |
| 139 | 78 | | | | |
| 217 | 81 | | | | |
| 298 | 78 | | | | |
| 376 | | | | | |
| $f_3 = 2583$ Hz | | | | | |
| 0 | 56 | 0,05 | 0,10 | 267,9 | 25,83 |
| 56 | 51 | | | | |
| 107 | 52 | | | | |
| 159 | 50 | | | | |
| 209 | 51 | | | | |
| 260 | 58 | | | | |
| 318 | 45 | | | | |
| 363 | | | | | |
| $f_4 = 3268$ Hz | | | | | |
| 37 | 39 | 0,041 | 0,082 | 268,0 | 32,68 |
| 76 | 40 | | | | |
| 116 | 42 | | | | |
| 158 | 41 | | | | |
| 199 | 46 | | | | |
| 245 | 35 | | | | |
| 280 | 38 | | | | |
| 318 | 47 | | | | |
| 365 | | | | | |
| | | | $\overline{c}$ | 264,56 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | Standard-abweichung | 8,71 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | Gauß | 21,72 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | $c_{Literatur}$ | 258 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | rel. Fehler | 0,0254 | |
| | | | Temperatur | 294 | K |
| | | | $M_{CO_2}$ | 0,044099 | $\frac{kg}{mol}$ |
| | | | R | 8,314472 | $\frac{J}{mol \cdot K}$ |
| | | | $\gamma$ | 1,263 | |
| | | | $\Delta\gamma$ | 0,207 | |
| | | | $\gamma_{Literatur}$ | 1,29 | |
| | | | rel. Fehler | -0,021 | |

## 3.2 Kundtsches Rohr

Die Messungenauigkeit der Frequenzen, die vom Oszillator abgelesen wurden, beträgt 50 Hz.
Zunächst der 0,75 m ± 0,01m lange Stahlstab.

| 1. Messung $\nu$ in Hz | 2. Messung $\nu$ in Hz | 3. Messung $\nu$ in Hz | Mittelwert $\nu$ in Hz | Anzahl Schwingungen | c in $\frac{m}{s}$ | Gauß in $\frac{m}{s}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3350 | 3350 | 3350 | 3350 | 2 | 5025 | 100,57 |
| 6700 | 6700 | 6700 | 6700 | 1 | 5025 | 76,78 |
| 10050 | 10050 | 10050 | 10050 | $\frac{2}{3}$ | 5025 | 33,52 |
| | | | $\bar{c}$ | 5025 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | Standart-abweichung | 0 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | Gauß | 70,2906 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | Literaturwert | 5031,5500 | $\frac{m}{s}$ | |
| | | | rel. Fehler | -0,0013 | | |
| | | | Dichte Stahl | 7833 | $\frac{kg}{m^3}$ | |
| | | | E-Modul | 1,978E+11 | $\frac{N}{m^2}$ | |
| | | | | 197,8 | $\frac{kN}{mm^2}$ | |
| | | | Δ E | 5533389676 | $\frac{N}{m^2}$ | |
| | | | | 5,5 | $\frac{kN}{mm^2}$ | |

Für den 1,602 m ± 0,02 m langen Messingstab ergibt sich:

| 1. Messung $\nu$ in Hz | 2. Messung $\nu$ in Hz | 3. Messung $\nu$ in Hz | Mittelwert $\nu$ in Hz | Anzahl Schwingungen | c in $\frac{m}{s}$ | Gauß in $\frac{m}{s}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3100 | 3050 | 3100 | 3083 | $\frac{3}{2}$ | 3293,0 | 67,39 |
| 6150 | 6150 | 6150 | 6150 | 3 | 3284,1 | 48,93 |
| 9350 | 9300 | 9200 | 9283 | 4,5 | 3304,9 | 44,94 |
| 12400 | 12400 | 12300 | 12367 | 6 | 3301,9 | 43,33 |
| | | | | $\bar{c}$ | 3296,0 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | | Standart-abweichung | 9,4 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | | Gauß | 51,15 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | | Literaturwert | 3515,68 | $\frac{m}{s}$ |
| | | | | rel. Fehler | -0,062 | |
| | | | | Dichte Messing | 8400 | $\frac{kg}{m^3}$ |
| | | | | E-Modul | 91252528649 | $\frac{N}{m^2}$ |
| | | | | | 91,25 | $\frac{kN}{mm^2}$ |
| | | | | Δ E | 2832076960 | $\frac{N}{m^2}$ |
| | | | | | 28,3 | $\frac{kN}{mm^2}$ |

# 4 Fehlerdiskussion

## 4.1 Quinkesches Resonanzrohr

Bei diesem Versuch liegt sowohl der Wert der Schallgeschwindigkeit in $CO_2$ als auch in der Luft im Intervall des Gaußfehlers. Der relative Fehler der Geschwindigkeit in Luft liegt nur 0,2 % unter dem Literaturwert, bei $CO_2$ sind es 2,5 % über dem Literaturwert. Beide Werte sind recht gut. Der größere Fehler bei $CO_2$ ergibt sich sowohl aus der größeren Schwierigkeit, die Bäuche genau zu hören, als auch aus der Tatsache, dass man sich nicht sicher sein kann, dass das ganze Rohr mit $CO_2$ befüllt ist, und nicht etwas Luft eingedrungen ist.
Die Werte für den Adiabatenexponenten liegen beide im Bereich des Gaußfehlers. Die Abweichungen von 0,8 % bei Luft und 2,1 % bei $CO_2$ sind relativ gering.

## 4.2 Kundtsches Rohr

Beim Kundtschen Rohr liegen beide Messungen, sowohl für Stahl, als auch für Messing nicht im Intervall des Gaußfehlers. Trotzdem sind die Werte nicht allzu schlecht. Die relativen Fehler für Stahl betragen - 0,1 % und für Messing 6,2 %. Fehlerquellen waren die Ablesungenauigkeit vom Oszilloskop und eventuell auch Störgeräusche, die die Messung beeinflussten.

## 5 Literaturverzeichnis


- www.ep4.rub.de/imperia/md/content/skripte/ws04-05/physik1fuerphysiker/vorlesung/44lektion.pdf
- Protokoll von Andreas Josef Birnesser und Sascha Wagner (2000)
- Stöcker: „Taschenbuch der Physik“, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2. Auflage, 1994